Table des matières

1 Description **2**
- 1.1 Description Lagrangienne 2
- 1.2 Description Eulérienne 2

2 Lignes caractéristiques d'un écoulement **2**
- 2.1 Trajectoires 2
- 2.2 Lignes de courant 2
- 2.3 Lignes d'émission 2
- 2.4 Lignes Matérielles 2

3 Dérivée particulaire **3**
- 3.1 dérivée totale 3

4 Cinématique des déformations **3**

5 Hypothèses **3**
- 5.1 Masse Volumique Constante 3
  - 5.1.1 Relation Locale 3
  - 5.1.2 Relation Globale 3
- 5.2 Écoulements Isovolumes 3
  - 5.2.1 Conséquences 3
  - 5.2.2 Relation de Bernouilli 4
- 5.3 Analyse Dimensionnelle – Le Théorème pi 4

6 Diffusion **4**
- 6.1 Diffusion de Matière 4
  - 6.1.1 Loi de Fick Unidimensionnelle 4
  - 6.1.2 Loi de Fick Tridimensionnelle 5
- 6.2 Diffusion de la chaleur 5
  - 6.2.1 Loi de Fourrier Unidimensionnelle 5
  - 6.2.2 Loi de Fourrier Tridimensionnelle 5
  - 6.2.3 Relation de Conservation 5
  - 6.2.4 Équation de Diffusion 5

7 Forces Hydrostatiques **5**
- 7.1 Expression Volumique de la résultante des forces de pression 5
- 7.2 Relation locale de l'hydrostatique 5
- 7.3 Poussée d'Archimède 6
- 7.4 Force Volumique Visqueuse 6

8 Écoulements **6**
- 8.1 Équation de Navier-Stokes 6
  - 8.1.1 Coefficient de Reynolds 6
- 8.2 Équation D'Euler 6
- 8.3 1e Théorème de Bernouilli 6

1 Description

1.1 Description Lagrangienne

On repère la position au cours du temps de toutes les PF composant le fluide.

1.2 Description Eulérienne

On décrit le mouvement en décrivant l'évolution des propriétés du fluide mesuré à partir d'un point fixe dans le référentiel d'étude au cours du temps.

2 Lignes caractéristiques d'un écoulement

2.1 Trajectoires

$$\overrightarrow{R}\left(\overrightarrow{R_0}, t\right) = \overrightarrow{R_0} + \int_0^t \overrightarrow{v}\left(\overrightarrow{R}\left(\overrightarrow{R_0}, t\right), t\right) \mathrm{d}t \tag{2.1}$$

2.2 Lignes de courant

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{V_y}{V_x} \tag{2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{V_z}{V_x} \tag{2.3}$$

2.3 Lignes d'émission

Ce sont les lignes de toutes les PF qui sont passé par un même point d'émission R_0 à des instants t_0 différents.

$$\left\{\overrightarrow{R}\left(\left(\overrightarrow{R_0}, t_0\right), t\right)\right\} \tag{2.4}$$

- $\overrightarrow{R_0}$: point d'émission
- t_0 : instant d'émission
- t : instant d'observation de la LE

2.4 Lignes Matérielles

Toutes les PF de la ligne matérielle sont passées au même instant par la courbe $\mathscr{C}$

3 Dérivée particulaire

3.1 dérivée totale

$$\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla} = V_x.\frac{\partial}{\partial x} + V_y.\frac{\partial}{\partial y} + V_z.\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{D\overrightarrow{V}}{Dt}}_{\text{dérivée totale de la particule en suivant la PF}} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t} \\ &= \underbrace{\left.\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t}\right|_{\overrightarrow{r}}}_{\text{Contribution locale}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{V}}_{\text{Contribution advective}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

4 Cinématique des déformations

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{V}\right) = \omega \qquad \text{vecteur vorticité} \tag{4.1}$$

a) Débit Massique

Débit massique D_m sortant de $\mathscr{V}$ à travers S, surface délimitant $\mathscr{V}$ est le flux de $\overrightarrow{j_m}$ à travers S :

$$\begin{aligned} D_m &= \iint_S \overrightarrow{j_m}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} \\ &= \iint_S \rho\,\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} \end{aligned} \tag{4.2}$$

5 Hypothèses

5.1 Masse Volumique Constante

5.1.1 Relation Locale

Si le fluide de masse volumique constante ρ, c'est à dire homogène et uniforme alors :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{v}\right) = 0 \tag{5.1}$$

5.1.2 Relation Globale

$$v_1.S_1 = v_2.S_2 \tag{5.2}$$

5.2 Écoulements Isovolumes

5.2.1 Conséquences

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{v}\right) = 0 \tag{5.3}$$

5.2.2 Relation de Bernouilli

Le long d'une ligne de courant :

$$\frac{1}{2}\rho.v^2 + P = \text{Constante} \tag{5.4}$$

a) Équation de Conservation de la matière

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\rho \overrightarrow{v}\right) = 0 \tag{5.5}$$

5.3 Analyse Dimensionnelle – Le Théorème π

Soit une loi physique reliant n grandeurs physiques $(a_1, \ldots, a_n)$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \tag{5.6}$$

Ces n grandeurs physiques sont définies à l'aide de k unités.
Alors cette loi φ peut s'exprimer comme une loi reliant $n-k$ grandeurs adimensionnées $(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k})$

$$\mathscr{F}(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}) = 0 \tag{5.7}$$

6 Diffusion

6.1 Diffusion de Matière

$$c(\overrightarrow{r}, t) = \frac{\mathrm{d}N(\overrightarrow{r}, t)}{\mathrm{d}V} \tag{6.1}$$

$\overrightarrow{j}$: Vecteur densité de courant de traceurs $\overrightarrow{j} = j.\overrightarrow{e_x}$

$$\mathrm{d}N = \overrightarrow{j}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}\,\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

6.1.1 Loi de Fick Unidimensionnelle

$$j = -D.\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_t \tag{6.3}$$

avec D : Diffusivité moléculaire ou coefficient de diffusion.
Ou encore :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{6.4}$$

6.1.2 Loi de Fick Tridimensionnelle

$$j = -D.\overrightarrow{\nabla}(c) \tag{6.5}$$

avec D : Diffusivité moléculaire ou coefficient de diffusion.
Ou encore :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D.\Delta(c) \tag{6.6}$$

6.2 Diffusion de la chaleur

$\overrightarrow{j_Q}$: vecteur densité de courant de chaleur

6.2.1 Loi de Fourrier Unidimensionnelle

$$j_Q = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_t \tag{6.7}$$

6.2.2 Loi de Fourrier Tridimensionnelle

$$j_Q = -\lambda\overrightarrow{\nabla}(T) \tag{6.8}$$

6.2.3 Relation de Conservation

$$\rho \times C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0 \tag{6.9}$$

$$\rho \times C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{j_Q}\right) = 0 \tag{6.10}$$

6.2.4 Équation de Diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho.C_p}\Delta T \tag{6.11}$$

7 Forces Hydrostatiques

7.1 Expression Volumique de la résultante des forces de pression

$$\overrightarrow{f_v} = -\overrightarrow{\nabla}(P) \tag{7.1}$$

7.2 Relation locale de l'hydrostatique

$$\overrightarrow{\nabla}(P) = \rho.\overrightarrow{g} \tag{7.2}$$

7.3 Poussée d'Archimède

Poussée d'archimède d'un corps de volume V plongé dans un liquide de masse volumique ρ

$$\overrightarrow{P_a} = -\rho.\overrightarrow{g}V \tag{7.3}$$

7.4 Force Volumique Visqueuse

$$\overrightarrow{f_v} = \eta.\Delta\overrightarrow{V} \tag{7.4}$$

8 Écoulements

8.1 Équation de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla}(P) + \eta.\Delta\overrightarrow{v} + \rho.\overrightarrow{g} \tag{8.1}$$

8.1.1 Coefficient de Reynolds

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\left\|\rho(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V}\right\|}{\left\|\eta\Delta\overrightarrow{v}\right\|} \\ &= \frac{\rho}{\eta}.U.L \\ &= \frac{U.L}{\nu} \end{aligned} \tag{8.2}$$

avec

L Taille caractéristique de l'obstacle

η Viscosité du fluide

ρ Masse Volumique du fluide

U Vitesse relative de l'obstacle par rapport au fluide.

ν Viscosité Dynamique du fluide

8.2 Équation D'Euler

On néglige les termes visqueux dans l'équation précédente :

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla}(P) + \rho.\overrightarrow{g} \tag{8.3}$$

8.3 1$^{\text{er}}$ Théorème de Bernouilli

Pour un écoulement isovolume de fluide parfait, le long d'une ligne de courant :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho g z = \mathrm{c}^{\mathrm{te}} \tag{8.4}$$